Décomposition polaire: 8

Caldero - H2G2

p. -

Th: L'application $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \mapsto OS$
est un homéomorphisme.

dem: • μ est bien définie car $\det(OS) = \det(O)\det(S) \neq 0$ donc $OS \in GL_n(\mathbb{R})$.

• μ est continue car polynomiale en les coefficients de O et S.

• Mq μ est surjective. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$ et
$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tx\,{}^tMMx = {}^t(Mx)Mx = \|Mx\|_2^2 > 0$ ainsi ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Ainsi d'après le théorème spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que:

$${}^tMM = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}{}^tP \quad \text{avec } \lambda_i > 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!].$$

On pose $S = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}{}^tP \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a $S^2 = {}^tMM$ et on pose $O = MS^{-1}$. On ${}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1}$
$= S^{-1}S^2S^{-1}$
$= Id$

donc $O \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $M = OS$ et μ est surjective.

• Mq μ est injective. Soient (O', S') un autre couple. On a alors:
$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'\,{}^tO'O'S' = {}^tS'S' = S'^2$.
Soit Q un polynome tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Alors:

$$S = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}{}^tP = P\,Q\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right){}^tP = Q\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}{}^tP\right)$$
$$= Q({}^tMM)$$
$$= Q(S'^2)$$

Ainsi S et S' commutent et sont diagonalisables.
Elles sont donc diagonalisables dans la même base. $\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$S = P_0\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}P_0^{-1} \quad \text{et} \quad S' = P_0\begin{pmatrix} \mu_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n' \end{pmatrix}P_0^{-1}.$$

Mais $S^2 = S'^2 \Rightarrow P_0\begin{pmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^2 \end{pmatrix}P_0^{-1} = P_0\begin{pmatrix} \mu_1'^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n'^2 \end{pmatrix}P_0^{-1} \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i^2 = \mu_i'^2$

$\underset{S \text{ et } S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})}{\Rightarrow} \forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i = \mu_i'$.

$\Rightarrow S = S'$.

Donc $O = O'$ et μ est injective.

• Mq μ^{-1} est continue. Soient $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui CV vers $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\exists!\, O, S$ tq $M = OS$.

On note $\forall p \in \mathbb{N}$, $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$ donc $M_p = O_p S_p$

Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact, donc $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injection croissante tel que $O_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{O} \in O_n(\mathbb{R})$.

Et alors $S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} M_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{O}^{-1} M := \overline{S}$

Ainsi $\overline{S} \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Donc $M = \overline{O}\,\overline{S}$ et par unicité de la décomposition polaire $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$.

O est la seule valeur d'adhérence de la suite O_p qui est une suite d'un espace compact donc O_p CV vers O et finalement comme $M_p \to M$, $S_p \to S$. ▨

Recasage: 158 - 160 - (106) - 203

Question: (8)

1. Mq $O_n(\mathbb{R})$ est compact: Mq $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dim finie.

- $O_n(\mathbb{R})$ est fermé car si $f: \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tMM \end{array}$ f est continue et $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I\})$.

- $O_n(\mathbb{R})$ est compact car $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\|_2 = 1$, $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, on a : $\|Mx\|_2 = \|x\|_2 = 1$.
Donc $|||M|||_2 = 1$.

2. Mq $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$:

- Mq $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé. $S_n(\mathbb{R})$ est fermé comme s-e-v d-f.
De plus si $(S_k) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tq $S_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
D'une part $M \in S_n(\mathbb{R})$ car $S_n(\mathbb{R})$ est fermé et d'autre part :
si $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ${}^tx S_k x \geq 0$ et par continuité de l'applica° $M \mapsto {}^txMx$
on $\lim\limits_{k\to+\infty} {}^tx S_k x \geq 0$

$$\lim_{k\to+\infty} {}^tx S_k x = {}^tx \lim_{k\to+\infty} S_k x = {}^tx M x$$

$S_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

- Ainsi, comme $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$, on a $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \overline{S_n^+(\mathbb{R})} = S_n^+(\mathbb{R})$.
Pour montrer l'inclusion inverse, si $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$
on pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S_k \doteq P\begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{1}{k} \end{pmatrix}P \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S$
et $S_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\lambda_k \geq 0$ ($S \in S_n^+(\mathbb{R})$)
On a donc trouvé une suite de matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui tendait vers S, autrement dit $S_n^+(\mathbb{R}) \subset \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$.

3. Pq une suite, qui a une seule valeur d'adhérence dans un compact, CV vers cette valeur d'adhérence ?

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne CV pas vers a la valeur d'adhérence.
Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - a| > \varepsilon$.
Ainsi il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - a| > \varepsilon$.
Mais la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un compact donc elle admet une valeur d'adhérence disons $b \neq a$.
Mais la valeur d'adhérence b est aussi valeur d'adhérence de (x_n) qui par hyp n'en admettait qu'une seule a. $\not\sim$.

Contre-exemple dans un espace non-compact : $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$ qui n'a qu'une valeur d'adhérence 0 mais qui ne CV pas.

4. Mq $|||A||| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ si $A \in GL_n(\mathbb{R})$

On a par le th de décomposition polaire $\exists!\ (S,O) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tq $A = OS$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|A(x)\|_2 = \|OS(x)\|_2 \underset{O \in O_n(\mathbb{R})}{=} \|S(x)\|_2 \Rightarrow |||A||| = |||S|||$.

Par th spectral, il existe une BON $(e_1, \dots, e_n)$ de vep. $(e_i)_{1\leq i \leq n}$ est orthonormale

Si $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\| = 1$; $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. $\|S(x)\|_2 = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2}$

$\leq |\lambda_{max}| \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}_{=\|x\|_2 = 1}$

$\leq \rho(S)$

$\Rightarrow |||S|||_2 \leq \rho(S)$, mais $\|S(e_{max})\|_2 = \|\lambda_{max} e_{max}\|_2 = |\lambda_{max}| = \rho(S)$

Ainsi $\rho(S) \geq |||S|||_2$ d'où $|||S||| = \rho(S)$.

Finalement, $|||A||| = \rho(S) = |\lambda_{max}| = \sqrt{\lambda_{max}^2} \underset{\text{preuve de la décomp polaire}}{=} \sqrt{\rho(A^*A)}$

5. A-t-on $|||A||| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$?

Oui, cela résulte de la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et de la continuité du rayon spectral.

Montrons ce deuxième point, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$.

- Tout d'abord, si T_k est une suite de matrice triangulaire tendant vers $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A est triangulaire et $\rho(T_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.

- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$. Tout d'abord on $\rho(A_k) \leq \|A_k\| \leq C$ car la suite $(\|A_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est CVnte donc bornée et on a $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) \leq \|A\|$ car $\|Ae_{\lambda_{max}}\| = |\lambda_{max}| = \rho(A)$.

Donc la suite $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée elle admets donc une sous-suite CVnte $(\rho(A_{\varphi(k)}))$

$\varphi(k)\in\mathbb{N}$. Par processus de trigonalisation des matrices complexes, $\exists\ U_{\varphi(k)} \in U_n(\mathbb{C})$ tq $A_{\varphi(k)} = U^*_{\varphi(k)} T_{\varphi(k)} U_{\varphi(k)}$

↳ reprendre la dem de 153.6 en prenant pour HP une base orthonormée.

avec $T_{\varphi(k)}$ triangulaire. Or $U_n(\mathbb{C})$ est compact donc $\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $U_{\psi\circ\varphi(k)} \to U \in U_n(\mathbb{C})$.

Ainsi $T_{\psi\circ\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} U A U^* = T$. ($\lim_{k\to+\infty} A_{\psi\circ\varphi(k)} = A$) Par la remarque préliminaire : $\rho(A_{\varphi(k)})$ est déjà convergente

$$\lim_{k\to+\infty} \rho(T_{\psi\circ\varphi(k)}) = \rho(T) \underset{A \text{ et } T \text{ sont semblables}}{=} \rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \rho(A_{\psi\circ\varphi(k)}) = \lim_{k\to+\infty} \rho(A_{\varphi(k)})$$

Ainsi $(\rho(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et admets une seule valeur d'adhérence $\rho(A)$ d'après 3. elle CV vers $\rho(A)$.